



國立臺灣師範大學
National Taiwan Normal University

策略提示對不同能力國中生 幾何解題學習的影響

吳昭容^{1*}、楊忠璇²、鄭英豪³

^{1,2}國立臺灣師範大學教育心理與輔導學系

³臺北市立大學數學系

緒論&動機(1/2)

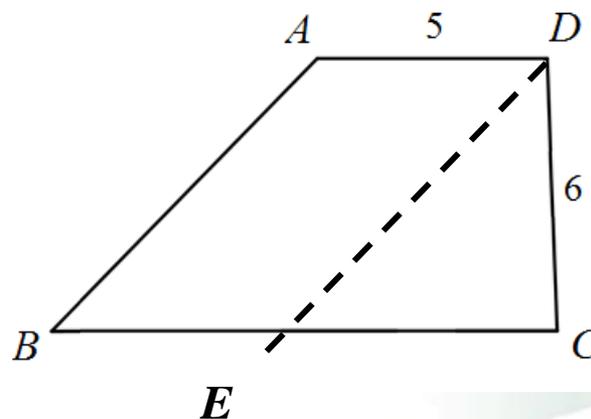
- 需要畫輔助線的幾何文字題

在梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ，

$\overline{AD} = 5$ ， $\overline{CD} = 6$ ， $\angle D = 2\angle B$ ，

求 \overline{BC} 的長。

解：



緒論&動機(2/2)

- 國中的幾何量解題的學習時常採取工作範例（worked-out example）的方式支持生手獲得一些基礎的認知技能。
- 然而，學生常流於表象的學習，依樣畫葫蘆，原因是學習者不會主動思考，即便已提供解釋型教學說明情境之下亦無法主動思考（Berthold & Renkl, 2010; Wittwer & Renkl, 2010）。



策略提示的相關研究(2)

- 本研究認為如果閱讀範例之前須要使學生有主動思考的習慣，則可能有助於掌握解題原理，增進理解。心眼論的假設指出眼睛可以反映思考重點，因此從眼動的資料上可以看到一些主動思考的線索。
- 主動思考的提示設計是參考動態評量的策略
 - 主要參考一般化的類型，非不太過細分化，學生可以學會並應用在新題目上，重點放在較易產生困難的階段，如何做出有助於解題的輔助線（古明峰，1987；Orosco, Swanson, O'Connor, & Lussier, 2013）。



研究問題

- 本研究透過自編測驗以及眼球追蹤技術探討以下兩個問題：

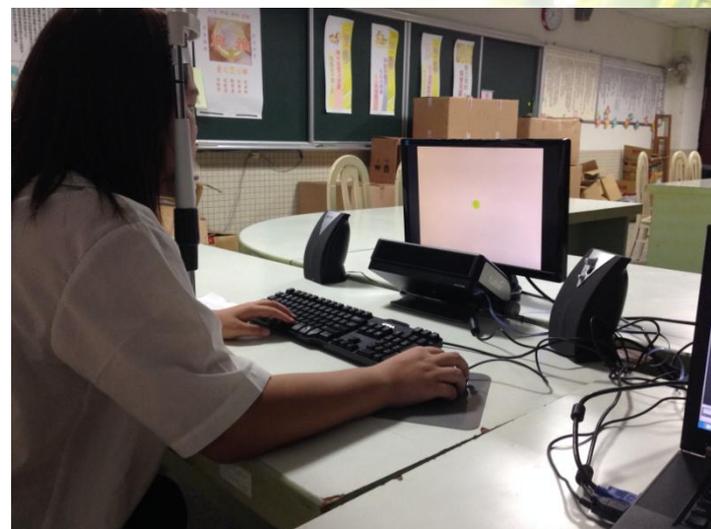
比較不同數學能力的國中生在有無策略提示的情境下，閱讀幾何範例的

- (1) 學習成效有何差異？
- (2) 學習歷程有何差異？



研究方法 (1/3)

- 受試者：
 - 來自兩個台北市國中，從六個班篩選出33名八年級學生，依據先備知識測驗和教師評比將學生分成高能力19人和中能力14人
- 實驗儀器：
 - Tobii X120眼動儀
(取樣率120Hz)
 - 19吋螢幕顯示器
(解析度1024×768個像素)



研究方法(2/3)

• 實驗材料：文本

若 $M \parallel N$, $\angle 1$
求 $\angle 3$ 的度數。
解：

延長 \overline{AB} , 交直
因為 $M \parallel N$,
又 $\angle 3 = \angle 4 +$
因此 $\angle 3 = \angle 1$
故 $\angle 3 = 50^\circ + 6$

在梯形 $ABCD$ 中
 $\overline{AD} = 5$, $\overline{CD} =$
求 \overline{BC} 的長。

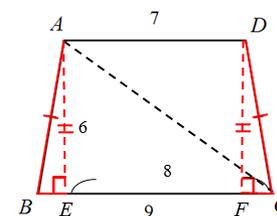
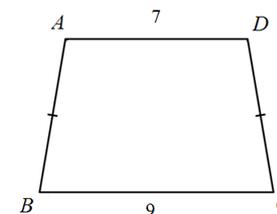
解：
過 D 點作平行 \overline{AD}
因為 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ 且
可得 $\overline{AD} = \overline{BE}$
又 $\angle D = 2\angle B$,
故 $\angle B = \angle ADE =$
由 $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$, 可
由①、②, 可得
故 $\overline{BC} = \overline{BE} + \overline{C}$
 $= \overline{AD} + \overline{C}$

直線 L 分別切圓
圓 O_1 與圓 O_2 的半
求 \overline{AB} 的長。

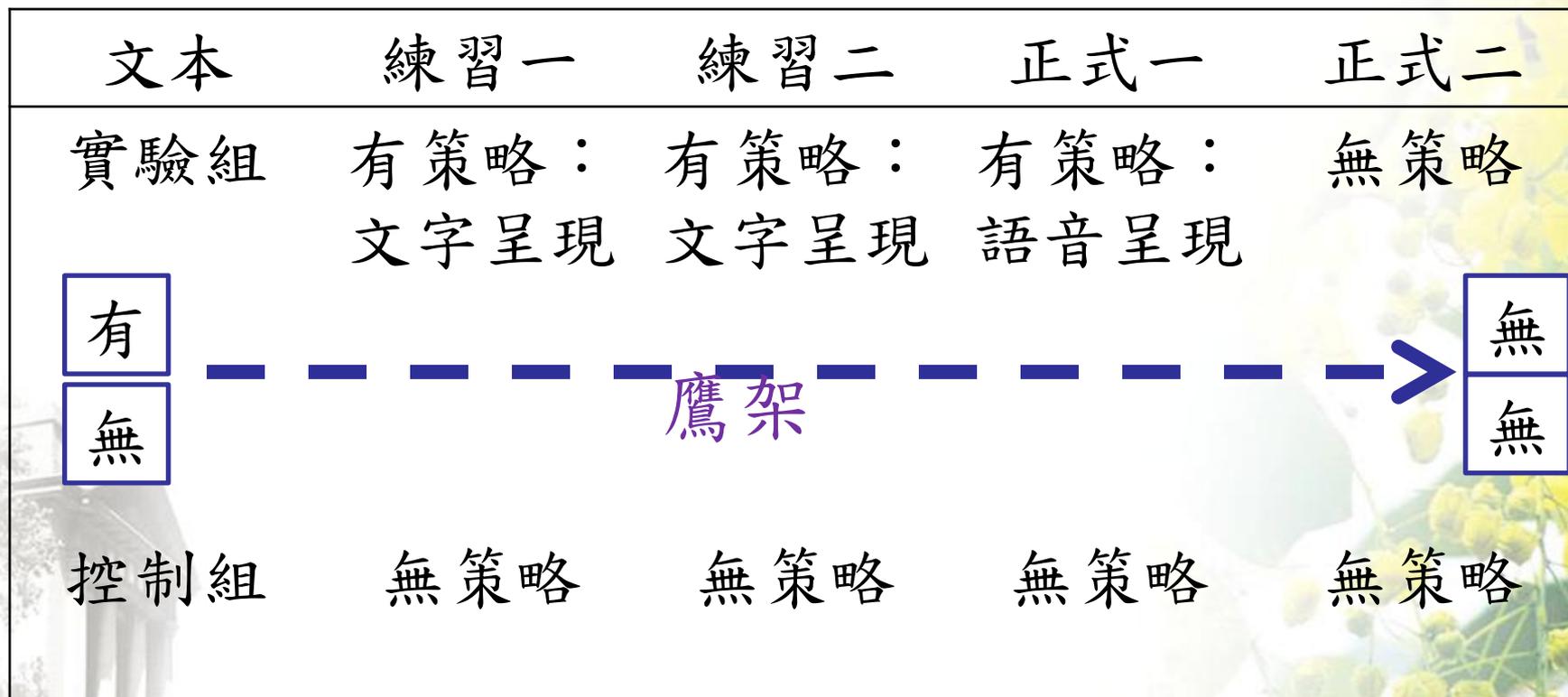
解：
過圓心 O_2 作一直
因為 $\overline{O_1A} \perp L$ 、 $\overline{O_2C}$
因此 $\overline{AC} = \overline{O_2B}$
又 $\triangle O_1O_2C$ 是直
所以 $\overline{O_1C} = \overline{O_1A}$
 $= \overline{O_1A}$
由畢氏定理知：
 $\overline{CO_2}^2 = \overline{O_1O_2}^2 -$
故 $\overline{AB} = \overline{CO_2} =$

在等腰梯形 $ABCD$ 中, $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$,
 $\overline{AB} = \overline{CD}$, $\overline{AD} = 7$, $\overline{BC} = 9$, 高為 6,
求對角線 \overline{AC} 的長。

解：
連接 \overline{AC} 。
過 A 點、 D 點分別作 \overline{BC} 之垂線, 相交 \overline{BC} 於 E 點、 F 點,
則 $\overline{AE} = \overline{DF} = 6$ (梯形的高)。
又 $\overline{AB} = \overline{CD}$ 、 $\angle AEB = \angle DFC = 90^\circ$,
所以 $\triangle ABE \cong \triangle DCF$ (RHS 全等),
因此 $\overline{BE} = \overline{CF} = \frac{1}{2}(9-7) = 1$ 。
在 $\triangle AEC$ 中, $\overline{CE} = \overline{BC} - \overline{BE} = 9-1=8$ 。
由畢氏定理知：
 $\overline{AC}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{CE}^2 = 6^2 + 8^2 = 100$,
故對角線 $\overline{AC} = 10$ 。



研究方法 (3/3) 實驗程序



研究方法 (2/3) 實驗程序

- 實驗組：練習一

下
這

若 $M \parallel N$
求 $\angle 3$ 的
解：

若 $M \parallel N$
求 $\angle 3$ 的
解：

若 $M \parallel N$
求 $\angle 3$ 的
解：

若 $M \parallel N$
求 $\angle 3$ 的
解：

若 $M \parallel N$ ， $\angle 1 = 50^\circ$ ， $\angle 2 = 60^\circ$ ，
求 $\angle 3$ 的度數。
解：

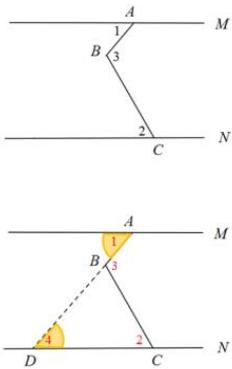
題目問

題目問

題目上

題目上

延長 \overline{AB} ，交直線 N 於 D ，
因為 $M \parallel N$ ，所以 $\angle 4 = \angle 1$ （內錯角相等）。
又 $\angle 3 = \angle 4 + \angle 2$ （外角等於兩內對角之和），
因此 $\angle 3 = \angle 1 + \angle 2$ ，
故 $\angle 3 = 50^\circ + 60^\circ = 110^\circ$ 。



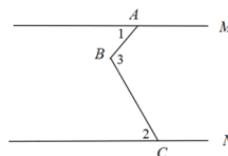
研究方法 (2/3) 實驗程序

- 控制組：練習一

若 $M \parallel N$, $\angle 1 = 50^\circ$, $\angle 2 = 60^\circ$,

求 $\angle 3$ 的度數。

解：



若 $M \parallel N$, $\angle 1 = 50^\circ$, $\angle 2 = 60^\circ$,

求 $\angle 3$ 的度數。

解：

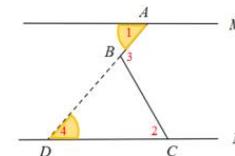
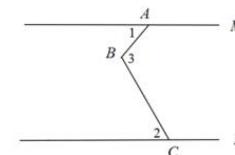
延長 \overline{AB} , 交直線 N 於 D ,

因為 $M \parallel N$, 所以 $\angle 4 = \angle 1$ (內錯角相等)。

又 $\angle 3 = \angle 4 + \angle 2$ (外角等於兩內對角之和),

因此 $\angle 3 = \angle 1 + \angle 2$,

故 $\angle 3 = 50^\circ + 60^\circ = 110^\circ$ 。



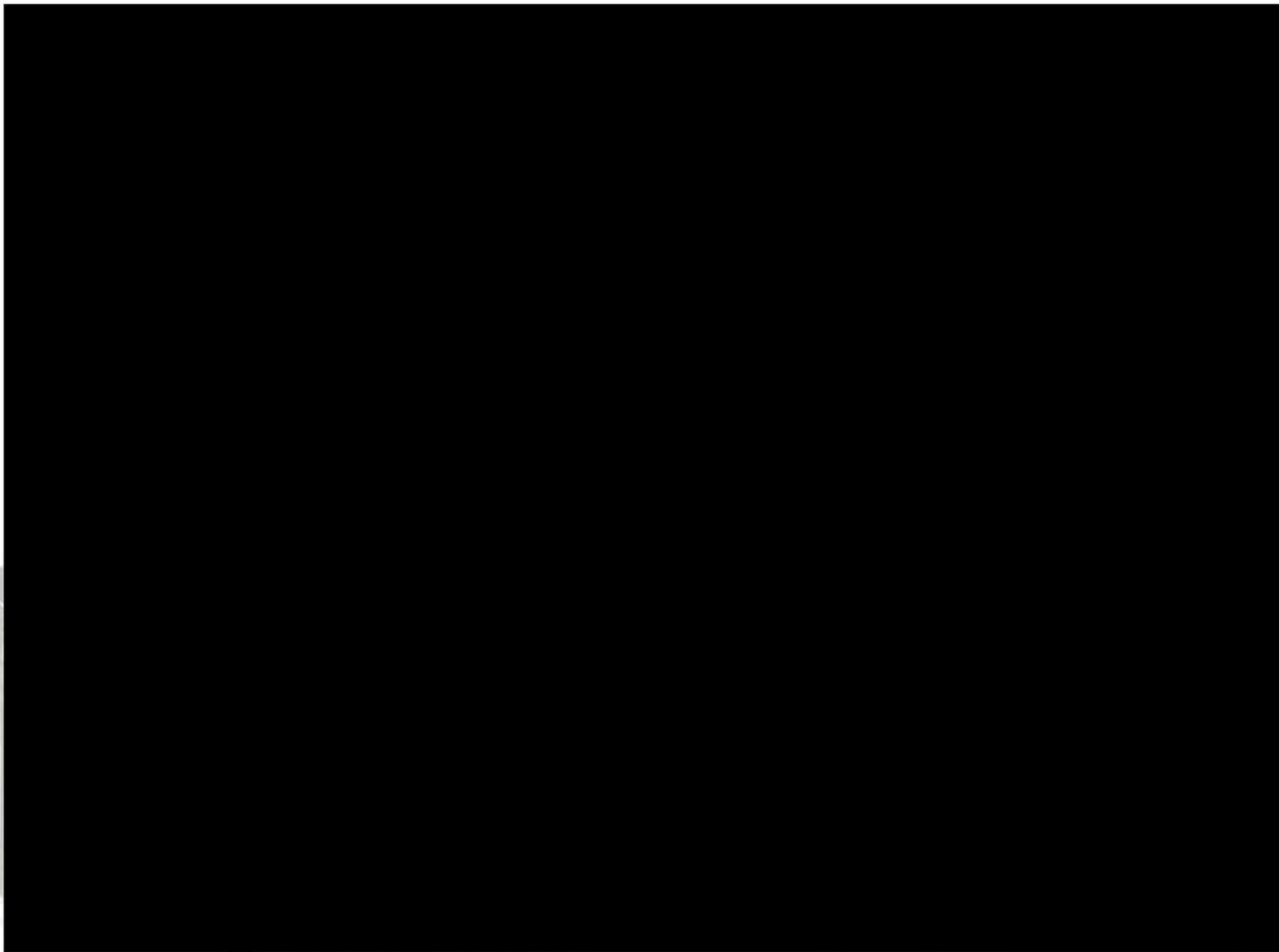
眼動資料個案分享

背景資料

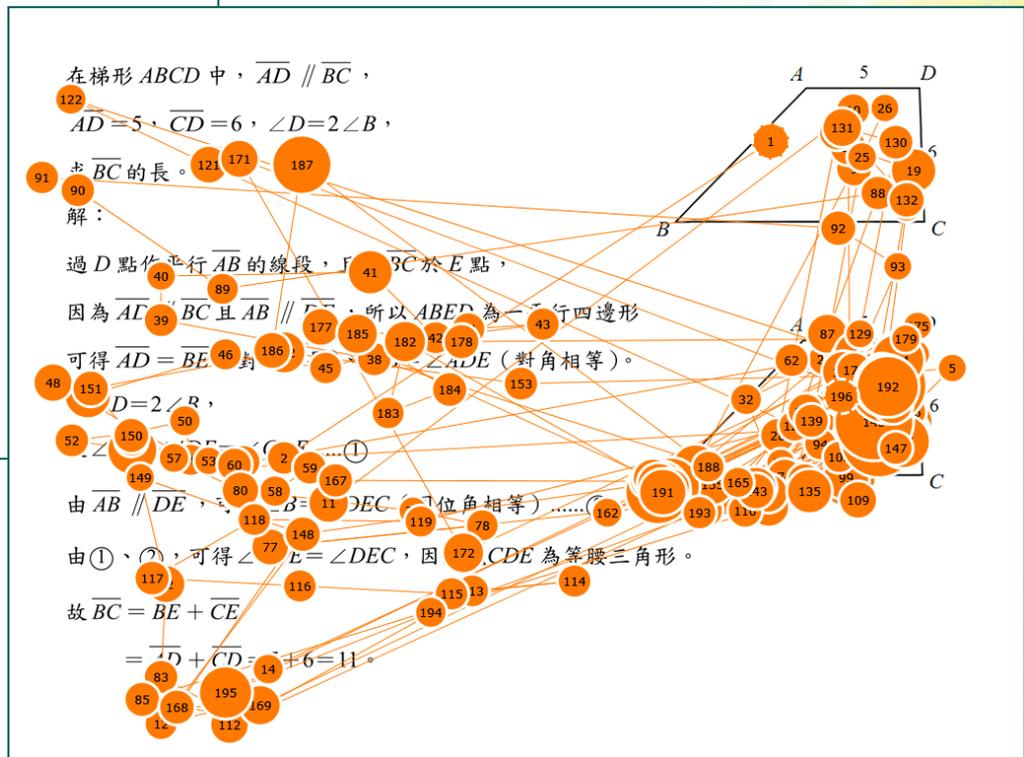
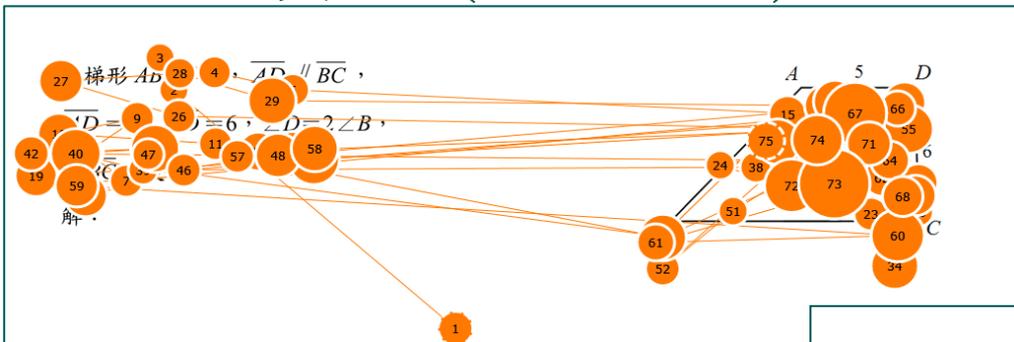
- 實驗組高能力sy23
- 測驗正確率
 - 理解測驗：.92; 回憶測驗：.51; 遷移測驗：.75
- 總凝視時間：62.4秒
- 讀文比率：
 - 讀題階段：63%
 - 讀解題範例階段：74%



眼動資料影片播放



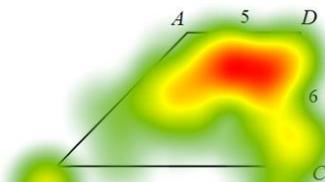
眼動資料(fixation)



眼動資料(熱區圖)

在梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ，
 $\overline{AD} = 5$ ， $\overline{CD} = 6$ ， $\angle D = 2\angle B$ ，

解：



在梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ，
 $\overline{AD} = 5$ ， $\overline{CD} = 6$ ， $\angle D = 2\angle B$ ，

求 \overline{BC} 的長。

解：

過 D 點作平行 \overline{AB} 的線段，且交 \overline{BC} 於 E 點，

因為 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ 且 $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$ ，所以 $ABED$ 為一平行四邊形

可得 $\overline{AD} = \overline{BE}$ (對邊等長)、 $\angle B = \angle ADE$ (對角相等)。

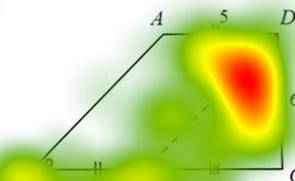
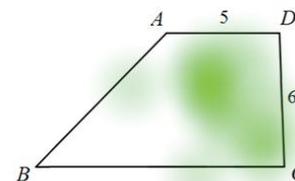
又 $\angle D = 2\angle B$ ，

故 $\angle B = \angle ADE = \angle CDE$①

由 $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$ ，可得 $\angle B = \angle DEC$ (同位角相等).....②

由①、②，可得 $\angle CDE = \angle DEC$ ，因此 $\triangle CDE$ 為等腰三角形。

$$\begin{aligned}\text{故 } \overline{BC} &= \overline{BE} + \overline{CE} \\ &= \overline{AD} + \overline{CD} = 5 + 6 = 11.\end{aligned}$$



研究結果與討論(1/7)學習成效

研究問題 (1)：比較不同數學能力的國中生在有無策略提示的情境下，閱讀幾何範例的**理解測驗**有何差異？

表一 兩組能力學生在不同策略提示的理解測驗、回憶測驗正確率 (%) 平均數與標準差

題型	策略提示	第一題		第二題		整體	
		高能力	中能力	高能力	中能力	高能力	中能力
		<i>M (SD)</i>					
理解測驗	有	85 (5)	72 (14)	86 (16)	58 (14)	85 (8)	65 (10)
	無	85 (6)	79 (8)	83 (15)	70 (34)	84 (7)	75 (18)
回憶測驗	有	59 (22)	30 (19)	49 (24)	35 (18)	54 (21)	32 (18)
	無	65 (15)	47 (22)	72 (19)	42 (23)	68 (15)	45 (20)

理解測驗：能力主要效果達顯著，高能力 > 中能力



研究結果與討論(2/7)學習成效

研究問題 (1)：比較不同數學能力的國中生在有無策略提示的情境下，閱讀幾何範例的回憶測驗有何差異？

表一 兩組能力學生在不同策略提示的理解測驗、回憶測驗正確率 (%) 平均數與標準差

題型	策略提示	第一題		第二題		整體	
		高能力	中能力	高能力	中能力	高能力	中能力
		<i>M (SD)</i>					
理解測驗	有	85 (5)	72 (14)	86 (16)	58 (14)	85 (8)	65 (10)
	無	85 (6)	79 (8)	83 (15)	70 (34)	84 (7)	75 (18)
回憶測驗	有	59 (22)	30 (19)	49 (24)	35 (18)	54 (21)	32 (18)
	無	65 (15)	47 (22)	72 (19)	42 (23)	68 (15)	45 (20)

回憶測驗：能力主要效果達顯著，高能力 > 中能力
 策略提示主要效果邊緣顯著，無策略 > 有策略的趨勢

研究結果與討論(3/7)學習成效

研究問題 (1)：比較不同數學能力的國中生在有無策略提示的情境下，閱讀幾何範例的遷移測驗有何差異？

表二 兩組能力學生在不同策略提示的遷移測驗正確率 (%) 平均數與標準差

策略提示	第一題(練習一)		第二題(練習二)		第三題(第一題)		第四題(第二題)		整體	
	高能力	中能力								
	<i>M</i> (<i>SD</i>)									
有	91 (30)	33 (52)	91 (30)	0 (0)	64 (50)	0 (0)	82 (41)	17 (41)	82 (25)	13 (21)
無	75 (46)	63 (52)	75 (46)	50 (53)	50 (53)	25 (46)	75 (46)	50 (53)	69 (32)	47 (36)

遷移測驗：能力主要效果達顯著，高能力 > 中能力

能力和策略提示達交互作用，有策略提示時，高能力 > 中能力

對中能力組而言，無策略提示 > 有策略提示

研究結果與討論(4/7)學習歷程

研究問題 (2)：比較不同數學能力的國中生在有無策略提示的情境下，閱讀幾何範例的總凝視時間有何差異？

表三 兩組能力學生在不同策略提示的解題範例總凝視時間(秒)平均數與標準差

策略提示	練習一		練習二		第一題		第二題	
	高能力	中能力	高能力	中能力	高能力	中能力	高能力	中能力
	<i>M</i>							
	(<i>SD</i>)							
有	28.54 (10.22)	31.56 (33.62)	47.41 (53.04)	63.59 (38.75)	75.94 (67.41)	51.30 (28.16)	74.28 (43.43)	87.76 (63.92)
無	34.40 (16.95)	25.79 (8.29)	52.07 (33.98)	55.68 (12.67)	58.03 (29.46)	74.18 (45.24)	56.90 (25.31)	100.96 (19.14)

閱讀時間：能力效果邊緣顯著，中能力>高能力組的趨勢



研究結果與討論(5/7)學習歷程

研究問題 (2)：比較不同數學能力的國中生在有無策略提示的情境下，閱讀幾何範例的文區比率有何差異？

表四 兩組能力學生在不同策略提示的四道題目上，其不同階段文區凝視時間佔整體比率

IA	策略提示	練習一		練習二		第一題		第二題	
		高能力	中能力	高能力	中能力	高能力	中能力	高能力	中能力
		<i>M</i> (<i>SD</i>)							
讀題階段	有	50.65 (11.89)	51.30 (19.05)	35.17 (12.79)	53.11 (11.77)	60.29 (14.49)	71.67 (17.80)	51.36 (10.22)	53.15 (19.48)
	無	56.53 (10.46)	63.69 (6.23)	52.43 (15.39)	62.48 (22.96)	39.71 (15.06)	48.42 (14.12)	42.74 (16.13)	58.22 (12.65)
讀解題範例階段	有	60.04 (9.32)	76.07 (19.88)	55.10 (10.93)	62.41 (15.95)	46.49 (10.24)	56.53 (13.62)	44.10 (10.94)	61.14 (22.37)
	無	61.96 (12.95)	66.05 (18.74)	50.37 (15.00)	58.50 (12.98)	46.77 (17.06)	62.47 (18.57)	44.83 (7.95)	60.11 (12.16)

讀題階段：策略提示主要效果達顯著，文字刺激時無策略>有策略；
語音刺激時有策略>無策略

能力主要效果達顯著，中能力>高能力

讀解題範例階段：能力主要效果達顯著，中能力>高能力

研究結果與討論(6/7)

其他發現

- 訪談不同能力受試者對解題策略提示有用的想法
 - 結果有84.8%的受試者認為解題策略提示有用，且高中能力的想法並無顯著差異。



結論與建議

- 高數學能力者比中能力者分配了較多的讀圖時間，可能是更能從幾何圖中獲取訊息，此結果與Wu (2013, July)研究大學生閱讀幾何證明題的結果一致。



結論與建議

--為什麼策略無效？

- 對策略使用不適應或不遵循
- 證據：
 - 效率與效益：總凝視時間未增加、高能力表現未提升
 - 眼動資料：策略提示移除則無法主動思考
 - 訪談資料：
 - 因為我不會用這一種的，上課只有聽老師說，所以都不會(去嘗試這些方式)，根本寫不出來，過程又那麼長很難記起來(cf21)

思考習慣的訓練非短時間可以形成，需要更長時間的訓練。

結論與建議

--為什麼策略無效？

- 加重認知負荷：
- 證據：
- 中能力的測驗表現更差
- 與黃佑家等人(2014)的研究結果類似：
 - 低能力的國小高年級生受後設認知問題之影響，增加負向認知負荷感，且降低信心和意願。

策略提示要避免引起負向認知負荷，所以對於中低能力的學生先掌握範例的程序性知識，待自動化程度提升後再安排策略提示的活動。

