

策略提示對不同能力國中生幾何解題學習的影響

吳昭容^{1*}、楊忠璇²、鄭英豪³

^{1,2} 國立臺灣師範大學教育心理與輔導學系

³ 臺北市立大學數學系

*cjwu@ntnu.edu.tw

解題範例是國中生數學解題的重要學習途徑，但容易流於只知其然不知其所以然，近期的研究嘗試增加引發學生思考的策略提示以改善此問題。本研究將 33 位八年級學生(高、中能力各為 19 和 14 位)隨機分派到有策略提示或者沒有的組別，並以 TobiiX120 紀錄其眼動。結果能力均顯現符合預期的效果;而策略提示在受試者的主觀判斷上有八成有幫助，但測驗結果顯示在理解測驗上沒有差異，而回憶測驗與遷移測驗上則與預期相反，策略提示組表現更差。眼動指標的讀文比率顯示，策略提示者低於無策略提示者，高能力者低於中能力，顯示策略提示以及數學能力影響文圖閱讀比重的分配。

關鍵字：工作範例、策略提示、數學能力、眼動追蹤

國中幾何學習的重點在於認識幾何性質並加以應用。需要畫輔助線的幾何文字題，由於解題所需之幾何性質必須在畫出輔助線之後才能顯現，對生手而言，難度特別高。工作範例 (worked example) 常用在數學或物理等科目的學習上。自範例中觀摩專家的解法，能在認知負荷較低的狀況下掌握解題步驟，是認知資源有限的生手能有效學習的路徑之一 (Atkinson, Derry, Renkl, & Wortham, 2000; Renkl, 1999)。然而，範例的觀摩學習常流於依樣畫葫蘆，使得因未能掌握解題原理，例如解題方向和解題步驟的意義，而無法變通、遷移到新的題目上。因此近期的研究致力於發現改善工作範例效用的相關因素，並發現自我解釋是關鍵之一，當學習者認真思考並嘗試解釋範例內容的意義時，這樣的認知涉入有助於改善學習成效。但問題是多數的學習者並不會主動思考，即使提供如何解釋的教學說明也不一定能提升概念性的理解，而是在確保可活化思考的情境下才可能改善 (Berthold & Renkl, 2010; Wittwer & Renkl, 2010)，因此這樣的思考模式必須透過活動安排來養成 (Renkl, 2011, 2014)。本研究在提供解題範例讓學生學習需畫輔助線的幾何文字題時，以提供策略提示的方式促進學習者主動思考，預期學習者若能學會在閱讀範例前先行思考解題的方式，可能有助於理解範例的解題原理，而有較佳的學習成效。

策略提示的設計可從動態評量的研究文獻借鏡。動態評量是一種給予個體中介協助的評量方式，透過互動過程來測試並促進個體的學習潛能，其中一類的互動方式是提供一般化的策略提示，學生可學會並自行應用在新題目上，策略提示設計不會過於細分，且將重點放在學生較容易產生困難的問題表徵階段，例如問題轉譯的提示、解題關鍵提示 (古明峰, 1997; Orosco, Swanson, O'Connor, & Lussier, 2013)。

本研究除了以理解測驗、回憶測驗和遷移測驗評估其學習成效之外，並且搭配眼球追蹤技術，以瞭解學生閱讀工作範例時的歷程。研究問題在於比較不同數學能力的國中生在有無策略提示的情境下，閱讀幾何範例的 (1) 學習成效有何差異？(2) 總凝視時間、讀文比率有無差異？

一、研究方法

受試者來自台北市兩所國中的八年級，根據先備知識測驗和教師對其數學能力的評比，從 174 名學生篩選出 33 名學生參與實驗。本研究排除低數學能力的學生，其先備知識分數 4 分以下，而高數學能力的參與者 19 名，中數學能力者 14 名，其先備知識分數的平均分別為 10.16 分、7.21 分。兩種能力的學生隨機分派到兩種實驗情境，策略提示組 17 名，無策略提示組 16 名。

實驗材料包括範例題與三種測驗。範例題是修改自國中教材的幾何輔助線應用題，內容是平行線截角性質、外切線長度、梯形，與等腰梯形等內容。範例架構與一般幾何應用題的解答類似，包含了題目、原始附圖、解題步驟，和搭配解題的附圖。每一範例題均有對應的理解測驗和回憶測驗，前者是採是非題測量從解題歷程中可直接學習到的內容，題數是 6 題，後者是透過紙筆測驗瞭解學生是否理解範例題的解題內容且可自行撰寫完整的步驟。遷移測驗則是修改兩題練習題和兩題範例題之內容，題數是 4 題。實驗材料經多次預試與修改，並經一名數學系的教授和一名科學教育博士生審查修訂。

研究工具採用 Tobii X120 眼動追蹤系統，使用 Tobii-Studio 軟體(2.2 版)蒐集眼動資料，呈現實驗材料的螢幕為 19 吋，解析度為 1027*768 的像素(pixels)。使用頭架固定受試者的

頭部以增加眼動資料準確性，受試者與 Tobii X120 的距離約為 70 公分。實驗材料以全螢幕呈現，其中文區約 17.5-25 公分×18 公分，圖區約 19 公分×12 公分。

研究程序包括兩階段。團測篩選階段：學生在原班接受研究者自編的先備知識測驗，約 30 分鐘，排除分數 4 分以下的學生，另外也請教師依據學生的數學能力分成高中低三群，排除低能力的學生後，針對高、中數學能力學生發出家長同意書；同意者進行下一階段。個別眼動實驗階段：受試者經指導語說明且眼球校正無明顯偏移後，進行練習程序，包含閱讀兩題範例練習題。正式實驗同練習程序，兩篇文本的順序固定。為求與自然閱讀情境相近，文本閱讀和作答不限時，個別實驗約 40 分鐘完成。

研究程序包含兩階段，團體篩選階段，學生在原班接受先備知識測驗，約 30 分鐘，排除數學能力低者之後選出高、中能力 19 名和 14 名進入下一階段。個別眼動實驗階段：受試者經指導與說明且眼動校正無誤後，進行練習程序，包含兩題順序固定的練習範例，先出現題目畫面，之後是解答範例階段，閱讀結束後按空白鍵。正式實驗增加了讀完範例題後接著作答理解測驗和回憶測驗，兩題範例題的順序固定。解題策略提示是閱讀範例之前，其中一半的學生會閱讀一頁解題策略提示說明，範例題在題目呈現 10 秒之後，自動出現 40 秒的解題策略提示教學，再自動出現解題步驟，練習一和二是較詳細的策略提示使用示範，範例一是語音呈現解題策略提示的提問，但不提供教學示範，範例二則不提供任何解題策略提示。本實驗中閱讀範例題與測驗作答時間均由受試者自行決定，整個實驗時間約 50-60 分鐘完成。眼動資料排除單題範例總凝視時間除以閱讀時間低於 30% 以下者，兩篇分別刪除 4 人，故眼動資料的有效樣本是 29 人。

資料分析方面，本實驗設計含有兩個自變項—能力與策略提示，為了探討二者的交互作用，因此採二因子變異數分析。然因受試者人數較少，所以又採無母數統計檢定的曼—惠特尼 U 檢定 (Mann-Whitney test) 分別考驗能力和策略提示兩個變項。由於無母數統計的結果與變異數分析主要效果的結論一致，故後續結果與分析僅報導二因子變異數分析的結果。

二、結果與分析

在學習成效方面，分別針對三個測驗正確率進行能力 (2) × 策略提示 (2) 的二因子變異數分析。理解測驗與回憶測驗的描述統計見表 1，遷移測驗的描述統計見表 2。

首先，整體而言，測驗難度符合預期，理解測驗、回憶測驗、遷移測驗的平均正確率為 .79、.51 和 .58，顯示理解測驗較回憶測驗與遷移測驗簡單，回憶測驗和遷移測驗難度則差不多。其次，在理解測驗上，能力的主要效果達顯著，高能力組 (.85、.85、.85) 在各題與整體表現顯著優於中能力 (.76、.65、.70)， $F(1, 29) = 11.08, p = .002, \eta^2 = .28$ ； $F(1, 29) = 6.95, p = .013, \eta^2 = .19$ ； $F(1, 29) = 13.47, p = .001, \eta^2 = .32$ ；策略提示的主要效果未達顯著，策略提示組在各題與整體表現和無策略提示組無顯著差異 ($ps > .05$)，交互作用的效果在各題與整體表現均不顯著。第三，在回憶測驗上，能力的主要效果達顯著，高能力組 (.62、.60、.61) 在各題與整體表現顯著均優於中能力 (.38、.38、.38)， $F(1, 29) = 10.67, p = .003, \eta^2 = .27$ ； $F(1, 29) = 7.86, p = .009, \eta^2 = .21$ ； $F(1, 29) = 11.20, p = .002, \eta^2 = .28$ ，解題策略提示的主要效果有邊緣顯著之情形，無策略提示組 (.57、.57) 在第二題與整體表現上有優於策略提示組 (.42、.43) 的趨勢， $F(1, 29) = 3.75, p = .06, \eta^2 = .12$ ； $F(1, 29) = 7.86,$

$p = .05$, $\eta^2 = .12$, 而在第一題表現上有無策略提示表現類似 ($ps > .05$), 交互作用的效果在各題與整體表現均不顯著。

表 1 兩組能力學生在不同策略提示的理解測驗、回憶測驗正確率 (%) 平均數與標準差

題型	策略提示	第一題		第二題		整體	
		高能力	中能力	高能力	中能力	高能力	中能力
		$M (SD)$	$M (SD)$	$M (SD)$	$M (SD)$	$M (SD)$	$M (SD)$
理解測驗	有	85 (5)	72 (14)	86 (16)	58 (14)	85 (8)	65 (10)
	無	85 (6)	79 (8)	83 (15)	70 (34)	84 (7)	75 (18)
回憶測驗	有	59 (22)	30 (19)	49 (24)	35 (18)	54 (21)	32 (18)
	無	65 (15)	47 (22)	72 (19)	42 (23)	68 (15)	45 (20)

最後，在遷移測驗上，能力的主要效果達顯著，高能力組 (.83、.83、.57、.78、.75) 在各題與整體表現顯著均優於中能力 (.48、.25、.13、.33、.30), $F(1, 29) = 5.00$, $p = .03$, $\eta^2 = .15$; $F(1, 29) = 17.41$, $p = .000$, $\eta^2 = .38$; $F(1, 29) = 7.42$, $p = .011$, $\eta^2 = .20$; $F(1, 29) = 7.78$, $p = .009$, $\eta^2 = .21$; $F(1, 29) = 18.98$, $p = .000$, $\eta^2 = .40$; 解題策略提示的主要效果未達顯著，策略提示組在各題與整體表現和無策略提示組無顯著差異；交互作用的效果在第二題與整體表現達顯著差異， $F(1, 29) = 5.63$, $p = .025$, $\eta^2 = .16$; $F(1, 29) = 5.14$, $p = .03$, $\eta^2 = .15$, 其他題則否 ($ps > .05$)。進一步分析單純主要效果發現，在有策略提示時，高能力組 (.91、.82) 表現會顯著優於中能力組 (.00、.13), $F(1, 29) = 21.10$, $p = .000$; $F(1, 29) = 21.61$, $p = .000$; 在無策略提示時，則兩種能力的受試者表現無差異；對中能力組而言，無策略提示時的表現 (.50、.47) 優於有策略提示 (.00、.13), $F(1, 29) = 5.64$, $p = .02$; $F(1, 29) = 4.69$, $p = .039$, 中能力組在策略提示的情境下會表現更差；對高能力組而言，則有無策略提示下表現無差異。

表 2 兩組能力學生在不同策略提示的遷移測驗正確率 (%) 平均數與標準差

策略提示	第一題(練習一)		第二題(練習二)		第三題(第一題)		第四題(第二題)		整體	
	高能力	中能力	高能力	中能力	高能力	中能力	高能力	中能力	高能力	中能力
	$M (SD)$	$M (SD)$	$M (SD)$	$M (SD)$	$M (SD)$	$M (SD)$	$M (SD)$	$M (SD)$	$M (SD)$	$M (SD)$
有	91 (30)	33 (52)	91 (30)	0 (0)	64 (50)	0 (0)	82 (41)	17 (41)	82 (25)	13 (21)
無	75 (46)	63 (52)	75 (46)	50 (53)	50 (53)	25 (46)	75 (46)	50 (53)	69 (32)	47 (36)

訪談受試者是否覺得解題策略提示有用，其結果顯示有 84.8% 的受試者認為解題策略提示有用，且高中能力的想法並無顯著差異， $\chi^2 = .04$, $p = .91$, 回應的內容例如「因為這樣子或許比起只看文字解說，如果看圖可以更容易找出線索，會更仔細看題目」、「如果單看題目或文字敘述的話，可能就是會忽略題目的一些，把題目標在圖上多看幾次，會比較瞭解題目要什麼」，少數人覺得沒有用的原因是看不懂，或者想的和策略提示之間有衝突，

例如「是因為我跟它用的那個(方法)不太一樣，所以這一題我覺得沒有幫助，其他的應該還是會有吧，就是把線索標在圖上比較容易看清楚在想什麼。」

眼動資料的有效樣本是 29 名，高能力 18 名，中能力 11 名，無策略提示組 14 名，策略提示組 15 名。表 3 呈現能力(2)×策略提示(2)在各題之總凝視時間(total fixation duration, TFD)的細格平均數(標準差)。總凝視時間是受試者在解題範例畫面上所有凝視點時間加總。各題需要花費的時間差異很大，練習一最短，平均是 30.11 秒，第二題最長，平均是 77.16 秒。2×2 變異數分析結果是交互作用在各題均未顯著，主要效果則是僅第二題的能力效果達邊緣顯著， $F(1, 29) = 3.41, p = .077, \eta^2 = .12$ ，其他題則否，中能力組的總凝視時間(93.86)有長於高能力組(65.59)的趨勢。從凝視時間上來看沒有策略提示效果，表示有策略提示並無法使學生因為思考而多花時間閱讀。

表 3 兩組能力學生在不同策略提示的解題範例總凝視時間(秒)平均數與標準差

策略提示	練習一		練習二		第一題		第二題	
	高能力 <i>M</i> (<i>SD</i>)	中能力 <i>M</i> (<i>SD</i>)	高能力 <i>M</i> (<i>SD</i>)	中能力 <i>M</i> (<i>SD</i>)	高能力 <i>M</i> (<i>SD</i>)	中能力 <i>M</i> (<i>SD</i>)	高能力 <i>M</i> (<i>SD</i>)	中能力 <i>M</i> (<i>SD</i>)
有	28.54 (10.22)	31.56 (33.62)	47.41 (53.04)	63.59 (38.75)	75.94 (67.41)	51.30 (28.16)	74.28 (43.43)	87.76 (63.92)
無	34.40 (16.95)	25.79 (8.29)	52.07 (33.98)	55.68 (12.67)	58.03 (29.46)	74.18 (45.24)	56.90 (25.31)	100.96 (19.14)

文區佔總凝視時間比率是文區總凝視時間除以圖文兩區總凝視時間的加總。分就讀題階段和讀範例階段的文區比率為依變項，進行能力(2)×策略提示(2)的二因子變異數分析，其描述統計結果見表 4。

讀題階段的文區比率，意指題目凝視時間佔整體(題目+題目圖示)的比率，能力的主要效果達顯著或邊緣顯著，中能力組(.58、.60)在練習二、第一題分別顯著或有趨勢地多於高能力組(.44、.50)， $F(1, 25) = 5.24, p = .031, \eta^2 = .17$ ； $F(1, 25) = 2.97, p = .097, \eta^2 = .11$ 。策略提示的主要效果同樣有顯著或邊緣顯著的情形，無策略提示組(.60、.58)在練習一、練習二分別有趨勢或顯著多於策略提示組(.51、.44)， $F(1, 25) = 3.83, p = .062, \eta^2 = .13$ ； $F(1, 25) = 4.74, p = .039, \eta^2 = .16$ 。在第一題時則是策略提示組(.66)顯著多於無策略提示組(.44) $F(1, 25) = 4.74, p = .039, \eta^2 = .16$ 。交互作用的效果在各題均不顯著($ps > .05$)。

讀範例階段的文區比率，意指題目和解答兩區的 FD 加總佔總凝視時間(圖區整體+文區整體)的比率，在能力的主要效果上，中能力組(.71、.60、.61)在練習一、第一題、第二題有多於高能力組(.61、.47、.45)的趨勢或顯著情形， $F(1, 25) = 3.23, p = .084, \eta^2 = .12$ ， $F(1, 25) = 5.06, p = .034, \eta^2 = .17$ ； $F(1, 25) = 10.35, p = .004, \eta^2 = .29$ 。在策略提示的主要效果和交互作用的效果在各題均不顯著。

表 4 兩組能力學生在不同策略提示的四道題目上，其不同階段文區凝視時間佔整體比率

IA	策略提示	練習一		練習二		第一題		第二題	
		高能力	中能力	高能力	中能力	高能力	中能力	高能力	中能力
		<i>M</i> (<i>SD</i>)	<i>M</i> (<i>SD</i>)	<i>M</i> (<i>SD</i>)	<i>M</i> (<i>SD</i>)	<i>M</i> (<i>SD</i>)	<i>M</i> (<i>SD</i>)	<i>M</i> (<i>SD</i>)	<i>M</i> (<i>SD</i>)
讀題階段	有	50.65 (11.89)	51.30 (19.05)	35.17 (12.79)	53.11 (11.77)	60.29 (14.49)	71.67 (17.80)	51.36 (10.22)	53.15 (19.48)
	無	56.53 (10.46)	63.69 (6.23)	52.43 (15.39)	62.48 (22.96)	39.71 (15.06)	48.42 (14.12)	42.74 (16.13)	58.22 (12.65)
讀範例階段	有	60.04 (9.32)	76.07 (19.88)	55.10 (10.93)	62.41 (15.95)	46.49 (10.24)	56.53 (13.62)	44.10 (10.94)	61.14 (22.37)
	無	61.96 (12.95)	66.05 (18.74)	50.37 (15.00)	58.50 (12.98)	46.77 (17.06)	62.47 (18.57)	44.83 (7.95)	60.11 (12.16)

三、討論與建議

策略提示對範例閱讀成效的影響方面，本研究發現，雖然受試者主觀上覺得策略提示是有效的，但在測驗結果則不符合預期。大致而言，無策略提示組表現優於策略提示組，顯示策略提示反而負向影響學生的學習表現，並且從交互作用的結果看來影響中能力的學生較大，導致中能力學生的表現更差。

上述現象與黃佑家等人 (2014) 的發現類似。該研究讓國小高年級學童學習幾何面積概念時搭配有後設認知的提問，結果不僅無助於理解，且降低學習意願和信心度，甚至增加低能力學生解題時的費力度。在教學性解釋的回顧文獻中亦指出，促進主動思考時須考量學生本身的知識與需求以及非認知的因素，例如動機和社會因素等 (Berthold & Renkl, 2010)，本研究的訪談資料也顯示了類似的問題。本研究確實有受試者反映習慣被動等待解答，沒有動機主動思考，「因為我不會用這一種的，上課只有聽老師說，所以都不會(去嘗試這些方式)，因為根本寫不出來，過程又那麼長，很難記起來」，以及學生的能力已經可自行解題，不需要使用策略提示，所以不了解策略提示的重要性。「因為我跟它用的那個(方法)不太一樣，所以這一題我覺得沒有幫助，其他的應該還是會有吧，就是把線索標在圖上比較容易看清楚在想什麼」。這顯示了在使用促進思考這一類的策略提示時，受試者可能因為不習慣這樣的思考方式而影響到學習的意願和信心，並且能力較差者受限於本身的認知發展，表現可能更糟。

從本研究的眼動資料可進一步瞭解策略提示對範例閱讀歷程的影響。在讀題階段，當策略提示是視覺或語音的方式播放時，在策略提示組和無策略提示組在讀文比率上是有顯著或趨勢上的差異，但當沒有策略提示的時候 (範例二)，則兩組的表現則差不多，顯示一旦抽離策略提示，策略提示組的學生無法主動思考，所以表現與無策略提示組的學生相同，這顯示由於實驗進行時間有限，本研究的策略提示對學生而言屬於知覺層次的刺激，不能深入改變學生的思考模式。此外，研究者也懷疑不同策略提示呈現方式對學生的影響，

在策略提示是視知覺的文字時，策略提示組的讀文比率比無策略提示組來的少；而在策略提示是聽覺的語音時，策略提示組的讀文比率比無策略提示組來的多，這顯示視知覺呈現方式引導學生多去閱讀圖，聽覺的呈現方式時則引導學生多去閱讀文。然因目前此一現象與文字題的題目內容效果混淆，所以尚有待探討。

最後，本研究的高能力學生的測驗表現上不僅優於中能力，其閱讀歷程從眼動資料可發現，在文區佔總凝視時間比率的指標上高能力較中能力組來的低，以閱讀研究的觀點解釋之可能顯示高能力的閱讀流暢性較佳，而節省了讀文的時間。然而本研究的能力是指數學幾何知識，非指閱讀能力，且本研究並未限制閱讀時間，因此推測該現象產生之原因可能是不同能力學生獲取訊息的管道不同，高數學能力者比中能力者更能從幾何圖中獲取訊息，故分配了較多的讀圖時間，此結果與 Wu (2013, July)研究大學生閱讀幾何證明題的結果一致。

誌謝：感謝國科會(計畫編號：NSC 102-2511-S-003-020-MY3)的經費贊助。

四、參考文獻

- 古明峰 (1997)。加減法應用題語文知識對問題難度之影響暨動態評量在應用問題之學習與遷移歷程上研究。國立台灣師範大學教育心理與輔導研究所博士論文，台北市，未出版。
- 黃佑家、吳慧敏、黃暉娟、譚寧君、曾世綺、曾建銘 (2014)。以工作範例學習平行四邊形面積：後設認知問題對學習的影響。《臺灣數學教育期刊》，1 (1)，19-47。
- Atkinson, R. K., Derry, S. J., Renkl, A., & Wortham, D. (2000). Learning from examples: Instructional principles from the worked examples research. *Review of Educational Research*, 70(2), 181-214.
- Berthold, K., & Renkl, A. (2010). How to foster active processing of explanations in instructional communication. *Educational Psychology Review*, 22(1), 25-40.
- Orosco, M. J., Swanson, H. L., O'Connor, R., & Lussier, C. (2013). The effects of dynamic strategic math on English language learners' word problem solving. *The Journal of Special Education*, 47(2), 96-107.
- Renkl, A. (1999). Learning mathematics from worked-out examples: analysing and fostering self-explanations. *European Journal of Psychology of Education*, 14, 477-488.
- Renkl, A. (2011). Instruction based on examples. In R. E. Mayer & P. A. Alexander (2011). *Handbook of research on learning and instruction* (pp. 272-295). New York, NY: Routledge.
- Renkl, A. (2014). Toward an instructionally oriented theory of example-based learning. *Cognitive science*, 38(1), 1-37.
- Wittwer, J., & Renkl, A. (2010). How effective are instructional explanations in example-based learning? A meta-analytic review. *Educational Psychology Review*, 22(4), 393-409.
- Wu, C. J. (2013, July). Utilization of figures during proof reading among low and high prior knowledge readers. In A. M. Lindmeier & A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 5, 279. Kiel, Germany: PME.